معادله اینشتین در خلاء

وحیدکریمی پور_ دانشکده فیزیک _ دانشگاه صنعتی شریف

۲۹ آذر ۱۴۰۱

۱ مقدمه

در درس گذشته به توضیح اصول پایه نسبیت عام و گرانش پرداختیم. از این اصول پایه یعنی اصل هم ارزی و هموردایی قوانین فیزیک در چارچوب های مختلف، اینشتین به یک نتیجه مهم یعنی انتقال فروسرخ گرانشی دست یافت که بعدها در مشاهدات طیف سنجی و هم چنین آزمایش پاوند و ربکا نیز به تایید تجربی رسید. ا انتقال به سرخ گرانشی نتیجه ای است که تنها با استفاده از اصل هم ارزی پدید می آید و مستقل از نوع معادله ای است که برای میدان گرانش نوشته می شود. همین که انتقال سرخ گرانشی و کند شدن ساعت ها با تجربیات و مشاهدات دقیق سازگارند به خودی خود نشان دهنده درستی اصل هم ارزی است. ما این همه نسبیت عام نیست. در نظریه گرانش اینشتین باید بتوانیم تعیین کنیم که ماده چگونه فضای اطراف خود را خمیده می کند. پاسخ این سوال در معادلات میدان اینشتین [۱] داده می شود. این که ماده چگونه متریک فضا زمان را تغییر می دهد در معادله میدان تعیین می شود و طبیعی است که هر معادله میدانی که بنویسیم، منجر به نتایج نظری متفاوتی خواهد شد. خورشید یا هر ستاره دیگری را در نظر بگیرید. به جای آنکه بگوییم خورشید اجرامی را که در اطراف آن وجود دارند، جذب می کند، خواهیم گفت که خورشید فضازمان اطراف خود را دچار انحنا می کند و اجرام دیگر در این فضازمان خمیده روی مسیرهای ژئودزی حرکت می کنند. بنابراین مسئله اصلی این است که ماده چگونه فضازمان را خمیده می کند. به همان صورتی که در الکترومغناطیس یک معادله میدان مثل

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho_e \qquad (۱)$$

[۱] Einstein Field Equations

وجود دارد که نشان می دهد چگالی بار الکتریکی ρ_e چگونه میدان الکتریکی را تولید می کند، یا به همان صورتی که در گرانش نیوتنی معادله میدانی مثل

$$\nabla \cdot \mathcal{G} = 4\pi G \rho_m \tag{۲}$$

نشان می دهد که چگونه چگالی جرمی ρ_m در فضای اطراف خود میدان گرانش ایجاد می کند، در نسبیت عام هم باید تعیین کنیم که چگونه ماده فضای اطراف خود را خمیده می کند. آنچه که بدست خواهد آمد، تعمیمی از معادله گرانش نیوتن یعنی (۲) خواهد بود. البته طرف راست چنین معادله ای تنها چگالی ماده قرار نخواهد گرفت زیرا می دانیم در نسبیت جرم و انرژی معادل با یک دیگرند و بنابراین سرعت ماده نیز می بایست نقشی در تولید انحنا داشته باشد. چیزی که از آن مطمئن هستیم این است که میدانی که می خواهیم تعیین کنیم، همان متریک فضازمان یعنی $g_{\mu\nu}$ است. بنابراین معادلات میدان اینشتین می بایست معادلات دیفرانسیلی باشند که نشان دهند توزیع ماده و انرژی آن چگونه متریک فضازمان را تعیین خواهد کرد. این معادلات می بایست به صورت تساوی دو تانسور نوشته شوند تا اصل هموردایی را برقرار کنند. بدیهی است که این معادلات به صورت موضعی نوشته خواهند شد. در این درس به شکل معادله وقتی که طرف راست آن صفر است توجه می کنیم. به عبارت دیگر به معادلات میدان اینشتین در خلاء می پردازیم. برای اینکه بدانیم میدان گرانش در اطراف یک ستاره چگونه است کافی است که این معادلات را حل کنیم و همین نیز برای بسیاری از کاربردهایی که در نظر داریم، کافی است. این که جرم ستاره و شعاع آن چگونه در حل نهایی اثر می گذراند را با شرایط مرزی تعیین می کنیم، درست همانگونه که در حل معادله $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ در فضای خالی اطراف یک جسم باردار، عمل می کنیم.

۲ معادله گرانش اینشتین در غیاب ماده، یک تاریخچه کوتاه

از این همه مقدمه که گفتیم تا فضازمان خمیده که جایگزین نیروی گرانش می شود شکاف بزرگی است که تنها به مدد یک گام غول آسای آلبرت اینشتین برداشته شده. نمی توان پله به پله از آنچه که گفتیم به طور منطقی به استخراج معادلات نهایی اینشتین برای توصیف گرانش رسید. تنها می توان به حدس و گمان فرآیند فکری و خلاقانه اینشتین را به صورت خیلی تقریبی بازآفرینی کرد. ولی ملاک درستی صورت بندی اینشتین از گرانش تنها و تنها مطابقت دقیق با آزمایش است که البته تا کنون این مطابقت با دقت روزافزون وجود داشته است و امروزه نظریه نسبیت عام اینشتین به درستی توصیف کننده گرانش است. البته آنچه که به عنوان گام بزرگ اینشتین گفتیم در طی یک مدت طولانی و پس از سعی و خطاهای فراوان برداشته شده. وی نخست در سال ۱۹۰۷ اصل هم ارزی را تدوین کرد و با استفاده از آن توانست انتقال فروسرخ نور را در میدان گرانش پیش بینی

کند. در ۱۹۱۱ میزان انحراف نور خورشید را در میدان گرانش خورشید محاسبه کرد، اما به دلیل آنکه هنوز معادله درستی از میدان گرانش وجود نداشت، نتیجه این محاسبه نصف مقدار دقیقی بود که امروزه می دانیم و بعدها نیز در رصدهای آرتور ادینگتون مشاهده شد. طی سال های ۱۹۱۱ و ۱۹۱۲ ، اینشین و آبراهام [۲] و نوردستروم [۳] سعی کردند که معادله ای برای یک میدان اسکالر بنویسند که جایگزین معادله نیوتن شود، اما این تلاش ها به معادله مطلوبی برای توصیف گرانش منجر نشد. در سال ۱۹۱۳ همکاری اینشتین و دوست ریاضیدانش به نام مارسل گروسمن [۴] به این دریافت منجر شد که معادله میدان می بایست نه برای یک میدان اسکالر بلکه باید برای یک میدان ده مولفه ای یعنی همان مولفه های متریک $g_{\mu\nu}$ نوشته شود. طی سه سال بعد، اینشتین در مجموعه ای از مقالات به تدریج موفق به فرمول بندی معادله میدان خود شد و توانست به کمک همین معادلات میزان صحیح انحراف نور و هم چنین میزان دقیق حرکت تقدیمی مدار عطارد را محاسبه کند و سرانجام در ۱۹۱۶ فرمول بندی نهایی خود را از نظریه میدان گرانش نسبیتی عرضه کند.

طبیعا در این جا فرصتی برای پرداختن به این مسیر تاریخی وجود ندارد. بنابراین ما سعی می کنیم تنها نتیجه نهایی را با اندکی توصیف ذکر کنیم. این معادله می بایست بنابر اصل هموردایی می بایست به صورت تساوی دو تانسور نوشته شود. فرض می کنیم که طرف چپ این تساوی تانسوری باشد که خصلتی از فضا زمان را نشان می دهد و طرف راست آن تانسوری باشد که ناشی از توزیع ماده و انرژی است. اگر طرف دوم این معادله را به خاطر نبودن ماده برابر با صفر بگیریم، تنها تانسور سمت چپ را تعیین کنیم. این تانسور می بایست خصلت فضا زمان را نشان می دهد. بدیهی است که این طرف نمی تواند خود تانسور متریک یعنی $g_{\mu\nu}$ باشد، چرا که می دانیم متریک ، حتی در فضا زمان تخت نیز برابر با صفر نیست. شاید می بایست مشتقات متریک را در طرف چپ قرار داد، مثلا تانسوری که از جملاتِ از نوع $g_{\beta\mu,\alpha}$ تشکیل شده است. اما می دانیم که این مشتقات ساده تانسور نیستند. چطور است که مشتقات ساده را با مشتقات هموردا یعنی $g_{\beta\mu;\alpha}$ اضافه کنیم؟ اما می دانیم که مشتقات هموردای متریک همگی صفر هستند. طرف سمت چپ این معادله هم چنین نمی تواند مولفه های همبندی یا نمادهای کریستوفل باشند چرا که این مولفه ها تشکیل یک تانسور نمی دهند. بنابراین چنین معادلاتی اصل هموردایی را نقض خواهند کرد. چطور است که طرف اول معادله را خود تانسور ریمان قرار دهیم، یعنی بنویسیم:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0. \qquad (۳)$$

اما اگر چنین کنیم به این معناست که هر جا ماده نیست انحنا هم صفر است و و حال آنکه اگر قرار باشد سقوط اجسام را در میدان گرانش یک سیاره یا ستاره ناشی از انحنای فضازمان در اطراف آن بدانیم، پس در فضای خالیِ اطراف ستاره و جایی که ماده ای نیست الزاما نمی بایست خود

[۲] Abraham
[۳] Nordstrom
[۴] Marcel Grossman

انحنا برابر با صفر باشد. بنابراین ساده ترین انتخابی که باقی می ماند تانسور ریچی است. این تانسور تنها تانسوری که می توانیم سمت چپ قرار دهیم نیست اما ساده ترین آنهاست و اصلی که در طول تاریخ همواره اعتبار خود را برای توصیف جهان نشان داده، سادگی است مگر اینکه آزمایش و مشاهده آن را نقض کند. به این ترتیب معادله اینشتین در خلاء صورت زیر را به خود می گیرد.

$$R_{\mu\nu} = 0 \tag{۴}$$

این معادله البته معادله گرانش در آن قسمتی از فضاست که از ماده خالی است و البته معنایش این نیست که در آن قسمت از فضا میدان گرانش وجود ندارد. زمین در اطراف خود میدان گرانش بوجود می آورد و در اطراف آن معادله بالا بر متریک فضازمان حاکم است. (در گرانش نیوتنی نیز معادله گرانش در فضای اطراف یک جرم سنگین به صورت $\nabla\cdot\mathcal{G}=0$ است، بدون اینکه خود میدان $\mathcal{G}$ صفر باشد.) نخستین محک درستی این معادله می بایست آن باشد که در حد میدان های گرانشی ضعیف، تبدیل به معادله گرانش نیوتنی شود. این موضوعی است که در بخش بعدی به آن می پردازیم.

۱.۲ میدان گرانشی ضعیف، حد نیوتنی

نخست معادله گرانش نیوتنی را به زبان مناسبی بازنویسی می کنیم. اگر میدان گرانشی را در یک نقطه از فضا با $\mathcal{G}(\mathbf{r})$ نشان دهیم، و چگالی جرم را با $\rho(\mathbf{r})$ نشان دهیم می دانیم که معادله زیر برقرار است:

$$\mathcal{G}(\mathbf{r}) = \int d^3\mathbf{r}' \frac{G\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}(\mathbf{r}-\mathbf{r}'). \tag{۵}$$

با استفاده از قانون گاووس می توانیم این معادله را به صورت دیفرانسیلی زیر بنویسیم:

$$\nabla\cdot\mathcal{G}(\mathbf{r}) = -4\pi G\rho(\mathbf{r}) \tag{۶}$$

از آنجا که میدان گرانشی یک میدان پایستار است و در رابطه $\nabla\times\mathcal{G}=0$ نیز صدق می کند، می دانیم که یک پتانسیل اسکالر مثل $\phi(\mathbf{r})$ وجود دارد به قسمی که

$$\mathcal{G}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi. \tag{۷}$$

در نتیجه گرانش نیوتنی با یک میدان اسکالر ϕ توصیف می شود که در هر نقطه در معادله زیر صدق می کند:

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho. \tag{۸}$$

در فضای خالی، این معادله شکل زیر را پیدا می کند:

$$\nabla^2\phi = 0. \tag{۹}$$

بنابراین گرانش نیوتنی بر اساس یک میدان اسکالر توصیف می شود که در چنین معادله ای صدق می کند. این موضوع احتمالا دلیل تلاش اولیه اینشتین، آبراهام و نورستروم برای تعمیم گرانش نیوتنی به گرانش نسبیتی بر اساس یک میدان اسکالر بوده است. همچنین این موضوع نشان می دهد که چقدر فاصله بین گرانش نیوتنی که بر اساس یک میدان اسکالر توصیف می شود تا گرانش نسبیتی که بر اساس یک تانسور ده مولفه ای نوشته می شود، زیاد است.

حال باید خود را قانع کنیم که معادله گرانش اینشتین یعنی $R_{\mu\nu}=0$ که در واقع ده معادله برای متریک ده مولفه ای $g_{\mu\nu}$ است، واقعا در حد گرانش ضعیف به همان معادله نیوتن یعنی معادله (۹) برای یک میدان اسکالر در فضای خالی تبدیل می شود. در درس گذشته، و براساس اصل هم ارزی، یافتیم که در حد گرانش ضعیف، رابطه متریک با میدان گرانش یا پتانسیل گرانشی نیوتنی ϕ چگونه باید باشد. برای این کار یک ذره کم سرعت در نظر گرفتیم و معادله حرکت آن را در میدان نیوتنی ϕ یعنی

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = -\nabla^2\phi$$

را با معادله ژئودزی یعنی

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = -\Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}$$

مقایسه کردیم. این مقایسه منجر به رابطه زیر بین متریک و پتانسیل گرانشی در میدان های ضعیف شد:

$$g_{00} = 1 - \frac{2\phi}{c^2}. \tag{۱۰}$$

این تناظر ناشی از دینامیک یعنی مقایسه حرکت یک ذره بدست آمده است. باید ببینیم آیا همین رابطه از مقایسه معادله میدان نیز بدست می آید. چنانچه این رابطه بدست نیاید می بایست در معادله میدانِ $R_{\mu\nu}=0$ تجدید نظر کنیم. اما اگر پاسخ مثبت باشد البته به معنای تایید نهایی نسبیت عام نیست، اما به معنای این است که تا اینجا نظریه نسبیت عام لااقل سازگار است. برای این کار تانسور ریمان را به یاد می آوریم. از درس هندسه ریمانی داشتیم:

$$R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} = \partial_\mu\Gamma^\alpha{}_{\beta\nu} + \Gamma^\alpha{}_{\lambda\mu}\Gamma^\lambda{}_{\beta\nu} - \partial_\nu\Gamma^\alpha{}_{\beta\mu} - \Gamma^\alpha{}_{\lambda\nu}\Gamma^\lambda{}_{\beta\mu}. \tag{۱۱}$$

می توانیم همین تانسور را به شکلی بنویسیم که به یاد سپردن ، از نظر ترتیب اندیس ها، آسان تر باشد:

$$R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} = -\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\mu,\nu} - \Gamma^{\lambda}{}_{\beta\mu}\Gamma^{\alpha}{}_{\lambda\nu} - \mu \leftrightarrow \nu \tag{۱۲}$$

تانسور ریچی برابر است با:

$$R_{\beta\mu} = R^{\alpha}{}_{\beta\mu\alpha} = -\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\mu,\alpha} - \Gamma^{\lambda}{}_{\beta\mu}\Gamma^{\alpha}{}_{\lambda\alpha} - \mu \leftrightarrow \nu \tag{۱۳}$$

در حد میدان های ضعیف، داریم

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \tag{۱۴}$$

که در آن $h_{\mu\nu}$ کوچک است و می توانیم از توان های دوم آن صرف نظر کنیم. در این تقریب نخست مولفه های کریستوفل را بدست می آوریم:

$$\begin{aligned}\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\mu} &= g^{\alpha\lambda}\Gamma_{\lambda\beta\mu} = \frac{1}{2}g^{\alpha\lambda}(g_{\lambda\beta,\mu} + (g_{\lambda\mu,\beta} - (g_{\beta\mu,\lambda}) \\ &\approx \frac{1}{2}\eta^{\alpha\lambda}(h_{\lambda\beta,\mu} + (h_{\lambda\mu,\beta} - (h_{\beta\mu,\lambda}).\end{aligned} \tag{۱۵}$$

از آنجا که این علایم نسبت به $h_{\alpha\beta}$ ها از رتبه یک هستند، تانسور ریچی ساده می شود:

$$R_{\beta\mu} \approx \partial_{\mu}\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\alpha} - \partial_{\alpha}\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\mu} \tag{۱۶}$$

و یا پس از جایگذاری (۱۵) و ساده کردن

$$R_{\mu\beta} = \frac{1}{2}\left[\partial_{\mu}\partial_{\beta}h^{\alpha}_{\alpha} - \partial_{\mu}\partial^{\alpha}h_{\alpha\beta} - \partial_{\alpha}\partial_{\beta}h^{\alpha}_{\mu} + \partial_{\alpha}\partial^{\alpha}h_{\beta\mu}\right]. \tag{۱۷}$$

اگر همه مولفه های این تانسور برابر با صفر باشند، مولفه R_{00} نیز می بایست برابر با صفر باشد. حال توجه می کنیم که در یک میدان ایستا، متریک نیز ایستاست و مولفه های آن مشتق زمانی شان برابر با صفر است ، یعنی $\partial_0 h_{\beta\mu} = 0 \;\; \forall\beta,\nu$. با این حساب معادله $R_{00} = 0$ تبدیل می شود به

$$\frac{1}{2}\partial_{\alpha}\partial^{\alpha}h_{00} = -\frac{1}{2}\partial_{\alpha}\partial^{\alpha}\frac{2\phi}{c^2} = 0 \tag{۱۸}$$

و یا

$$\nabla^2\phi = 0 \tag{۱۹}$$

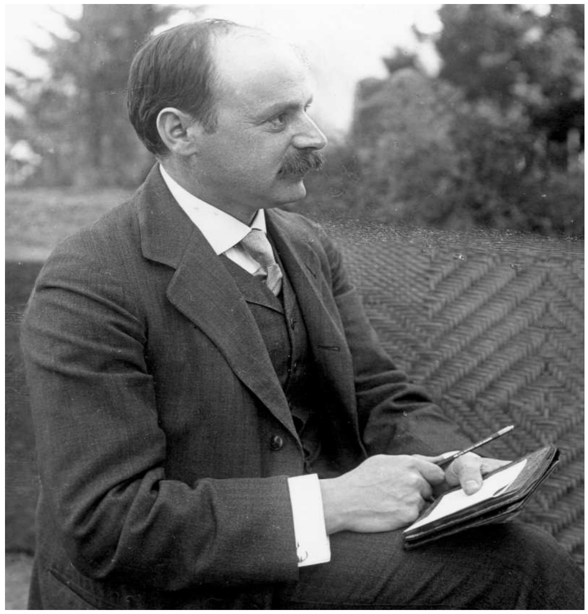
که همان معادله گرانش نیوتنی است. بنابراین از مقایسه معادلات میدان بازهم به رابطه ای می رسیم که با رابطه قبلی یعنی

$$g_{00} = 1 - 2\frac{\phi}{c^2}$$

که از مقایسه دینامیک بدست آوردیم سازگار است. تا اینجا دریافته ایم که در مسیر درست قرار داریم. البته تا تایید نهایی معادله میدان نسبیتی هنوز راه درازی باقی مانده است. نخست باید ببنیم این معادله میدان چه پیش بینی های جدیدی دارد و هم چنین شکل کامل آن را در حضور ماده بدست آوریم. در ادامه این درس نخست به این پرسش پاسخ می دهیم که متریک میدان گرانش اینشتین در اطراف یک ستاره یا هر جسم کروی دیگر چه شکلی دارد.

۳ حل شوارتچیلد

معادله اینشتین در غیاب ماده یعنی $R_{\mu\nu} = 0$ را در نظر می گیریم. این معادله میدان گرانشی را که در اثر هر توزیعی از ماده (یک ستاره ساکن، چرخان، یا یک کهکشان یا سحابی) ایجاد شده باشد، در بیرونِ آن توزیع ماده توصیف می کند. هدف ما دراینجا حل این معادله برای توزیعی از ماده مثل یک ستاره است که دارای تقارن کامل کروی است. این حل نخستین بار توسط کارل شوراتزچیلد ارائه شده و به همین دلیل حل شوارتزچیلد نامیده می شود.



شکل ۱: کارل شوارتچیلد (۱۸۷۳ـ۱۹۱۶)

این تقارن نوع متریک را به صورت زیر محدود می کند

$$ds^2 = Udt^2 - Vdr^2 - Wr^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (۲۰)$$

که در آن U, V و W توابعی از مختصه r هستند. با باز تعریف r می توان تابع W را نیز برابر با یک گرفت و در نتیجه شکل نهایی متریک به صورت زیر در می آید که در آن برای سادگی توابع $U(r)$ و $V(r)$ را به صورت $e^{2\nu}$ و $e^{2\lambda}$ نشان داده ایم:

$$ds^2 = e^{2\nu}dt^2 - e^{2\lambda}dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\phi^2. \quad (۲۱)$$

■ **توضیح:** پارامتر r نشان دهنده فاصله فیزیکی از مبدا مختصات نیست. این پارامتر، تنها یک مختصه شعاعی از مرکز است. فاصله های فیزیکی تنها با استفاده از متریک بدست می آیند. برای توصیف فضای اطراف یک سیاره می توان هر نوع مختصه ای را به کار برد. حتی برای مواردی ممکن است مختصات دینامیک و متحرک بهتر از مختصات ساکن کاربرد داشته باشد.

مولفه های قطری این متریک برابرند با:

$$g_{00} = e^{2\nu}, \qquad g_{11} = -e^{2\lambda}, \qquad g_{22} = -r^2, \qquad g_{33} = -r^2\sin^2\theta \quad (۲۲)$$

و مولفه های غیرقطری آن همگی برابر با صفرند.

$$g_{\mu\nu} = 0 \qquad \mu \neq \nu. \tag{۲۳}$$

با یک محاسبه سرراست می توان مولفه های کریستوفل را به صورت زیر بدست آورد:

$$\Gamma^1_{00} = \nu' e^{2\nu-2\lambda} \qquad \Gamma^0_{10} = \nu' \tag{۲۴}$$

$$\Gamma^1_{11} = \lambda' \qquad \Gamma^2_{12} = \Gamma^3_{13} = \frac{1}{r} \tag{۲۵}$$

$$\Gamma^1_{22} = -re^{-2\lambda} \qquad \Gamma^3_{23} = \cot\theta \tag{۲۶}$$

$$\Gamma^1_{33} = -re^{-2\lambda}\sin^2\theta \qquad \Gamma^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta. \tag{۲۷}$$

■ **تمرین:** الف- با استفاده از رابطه $\Gamma_{\alpha\beta\nu} = \frac{1}{2}(g_{\alpha\beta,\nu} + g_{\alpha\nu,\beta} - g_{\beta\nu,\alpha})$ مولفه های کریستوفل را که در بالا نوشته شده اند بدست آورید.

ب- یک راه ساده تر برای محاسبه مولفه های کریستوفل استفاده از معادله ژئودزی است. برای این مقصود، معادله اویلر ـ لاگرانژ را برای $\mathcal{L} = \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta$ برای متریک شوارتزچیلد حل کنید. همانطور که در درسهای قبلی شرح داده ایم، این معادله تبدیل به معادله ژئودزی برای پارامتر آفین می شود و می توانید علایم کریستوفل را از روی این معادله بخوانید. این کار را انجام دهید و نتایج را با آنچه که در قسمت الف بدست آوردید مقایسه کنید.

پس از بدست آوردن مولفه های کریستوفل می توانیم با استفاده از رابطه (۱۷) مولفه های تانسور ریچی را حساب کنیم. این مولفه ها برابرند با:

$$\begin{aligned}
R_{00} &= \Big(-\nu'' + \lambda'\nu' - \nu'^2 - \frac{2\nu'}{r}\Big)e^{2\nu-2\lambda} \\
R_{11} &= \nu'' - \lambda'\nu' + \nu'^2 - \frac{2\lambda'}{r} \\
R_{22} &= \Big(1 + r\nu' - r\lambda'\Big)e^{-2\lambda} - 1 \\
R_{33} &= R_{22}\sin^2\theta.
\end{aligned} \tag{۲۸}$$

که در آن همه مشتق ها نسبت به مختصه شعاعی یعنی r هستند. بقیه مولفه ها برابر با صفرند. برای حل این روابط نخست ضریب $e^{-2\nu+2\lambda}$ از رابطه اول را با رابطه دوم جمع می کنیم تا به رابطه ساده زیر برسیم:

$$\lambda' + \nu' = 0 \tag{۲۹}$$

که حل آن به معنای این است که

$$\lambda + \nu = c. \tag{۳۰}$$

در این رابطه c یک مقدار ثابت مستقل از r است. اما مقدار این ثابت را با مطالعه شعاع های خیلی بزرگ تعیین می کنیم. در شعاع های خیلی بزرگ انتظار داریم که این متریک به سوی متریک مینکووسکی یعنی متریک فضای تخت میل کند. بنابراین مقدار این ثابت برابر با صفر است . تا کنون مشخص شده است که:

$$\lambda = -\nu. \tag{۳۱}$$

به این ترتیب معادله سوم تبدیل می شود به

$$(1 + 2r\nu')e^{2\nu} = 1 \tag{۳۲}$$

و یا پس از ساده کردن سمت چپ

$$(re^{2\nu})' = 1. \tag{۳۳}$$

حل این معادله به صورت زیر است که در آن M یک ثابت انتگرال گیری است.

$$re^{2\nu} = r - 2M \tag{۳۴}$$

و یا

$$g_{00} = 1 - \frac{2M}{r}, \qquad g_{11} = -(1 - \frac{2M}{r})^{-1}. \tag{۳۵}$$

با توجه به اینکه R_{33} با R_{22} متناسب است، حل معادله سوم خود بخود به حل معادله چهارم نیز منجر می شود. در نتیجه فرم کلی متریک را بدست آورده ایم

$$ds^2 = \big(1 - \frac{2M}{r}\big)dt^2 - \big(1 - \frac{2M}{r}\big)^{-1}dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\phi^2. \tag{۳۶}$$

این متریک [۵] انحنای فضازمان را در اطراف هر جرم کروی یا چگالی یکنواخت نشان می دهد، خواه این جرم یک ذره کوچک باشد خواه کره زمین و خواه خورشید یا یک ستاره نوترونی. پارامتر M تنها پارامتر آزادی است که در این متریک وجود دارد که می بایست آن را به مشخصات ستاره

[۵] اگرچه برای این درس به تمامی مولفه های تانسور ریمان احتیاج نداریم ولی این مولفه ها در ضمیمه این درس حساب شده اند.

ای که چنین میدان گرانشی ای را ایجاد کرد مرتبط کرد. به شکل فعلی این متریک در سیستم واحدهای متریک نوشته نشده است. اگر بخواهیم آن را در این سیستم واحدها بنویسیم، باید از پارامترهای با دیمانسون G (ثابت جهانی گرانش) و c (سرعت نور) استفاده کنیم و واحدهای طرفین این رابطه را یکسان کنیم.

■ **تمرین:** با قراردادن پارامترهای مناسب c و G نشان دهید که در متریک بالا می بایست M را به $\frac{GM}{c^2}$ تبدیل کنیم. بنابراین اگر سرعت نور بی نهایت باشد، متریک شوارتزچیلد، به صورت متریک مینکووفسکی در می آید.

کمیت $r_c := \frac{2GM}{c^2}$ بعد طول دارد و شعاع شوارتزچیلد خوانده می شود. توجه کنید که در این متریک r را مختصه شعاعی [۶] می خوانیم. این مختصه با فاصله فیزیکی یا فاصله شعاعی فرق دارد. فاصله فیزیکی دو نقطه نزدیک به هم که مختصه شعاعی آنها به اندازه dr با هم فرق دارد برابر با $dl = (1-\frac{2GM}{rc^2})^{\frac{-1}{2}}dr$ است.

■ **تمرین:**

دو نقطه دارای مختصات (r_1,θ,ϕ) و (r_2,θ,ϕ) هستند. با فرض $r_1 = 10\ r_c, \quad r_2 = 20\ r_c$ و فاصله فیزیکی این دو نقطه را به صورت تقریبی حساب کنید. (راهنمایی: می توانید انتگرال را به صورت تقریبی حساب کنید.)

■ **مثال: فاصله فیزیکی و فاصله مختصاتی:** یک سفینه در اطراف یک ستاره خاموش به جرم M در یک مسیر شعاعی از نقطه ای با مختصه شعاعی r_1 حرکت می کند و به نقطه ای با مختصه شعاعی $r_2 < r_1$ می رسد. شعاع شوارتزچیلد ستاره یعنی r_c از r_1 و r_2 بسیار کوچک تر است. فاصله فیزیکی ای که این سفینه پیموده است چقدر است؟

حل: از آنجا که این سفینه مسیر شعاعی را طی می کند، فاصله فیزیکی آن برابر است با:

$$\Delta L = \int_{r_2}^{r_1}(1-\frac{r_c}{r})^{-1/2}dr \approx= \int_{r_2}^{r_1}(1+\frac{1}{2}\frac{r_c}{r})dr = r_1 - r_2 + \frac{r_c}{2}\ln\frac{r_1}{r_2}. \qquad (۳۷)$$

[۶] Radial Coordinate

۴ تاخیر در پژواک علایم راداری

از روی زمین می توانیم علائم راداری را در مسیر شعاعی به سوی یک سیاره نزدیک خورشید، مثلا سیاره عطارد بفرستیم و زمان برگشت آن علایم را نیز ثبت کنیم. بدون در نظر گرفتن نسبیت عام این زمان برابر است با:

$$\Delta T = \frac{\Delta L}{c} \tag{۳۸}$$

که در آن Δr فاصله زمین تا عطارد است. (بجای عطارد می توانید یک سفینه یا هر جسم دیگری را نیز تصور کنید.) در این مثال می خواهیم ببینیم فاصله زمانی واقعی که ما پژواک علایم راداری را دریافت می کنیم چقدر است. برای این کار توجه می کنیم که علایم راداری یک مسیر ژئودزی را طی می کنند که در آن $d\theta = d\phi = d\tau = 0$ است. بنابراین می توانیم بنویسیم:

$$(1-\frac{r_c}{r})c^2dt^2 = (1-\frac{r_c}{r})^{-1}dr^2 \tag{۳۹}$$

و یا

$$\frac{dr}{dt} = \pm c(1-\frac{r_c}{r}). \tag{۴۰}$$

علامت های مثبت و منفی برای مسیر رفت و برگشت هستند. این عبارت البته سرعت مختصاتی نور را نشان می دهد، یعنی اینکه dr نسبت به dt چگونه تغییر می کند. اگر بخواهیم کل زمان رفت را حساب کنیم، (با توجه به تقریب $r_c << r_1,\ r_2$) می نویسیم:

$$\Delta T' = 2\times\frac{1}{c}\int_{r_2}^{r_1}\frac{dr}{(1-\frac{r_c}{r})} \approx \frac{2}{c}\int_{r_2}^{r_1}(1+\frac{r_c}{r})dr = \frac{2}{c}\big[r_1 - r_2 + r_c\ln\frac{r_1}{r_2}\big]. \tag{۴۱}$$

در این رابطه r_1 فاصله زمین تا خورشید و r_2 فاصله عطارد (یا سفینه تا خورشید) است. اما باید دقت کنیم که این زمان زمانی نیست که ناظر مستقر روی زمین اندازه می گیرد. برای او زمان از رابطه زیر حساب می شود:

$$\Delta\tau = (1-\frac{r_c}{r_1})^{1/2}\Delta T' = (1-\frac{r_c}{r_1})^{1/2}\frac{2}{c}\Big[r_1 - r_2 + r_c\ \ln\frac{r_1}{r_2}\Big]. \tag{۴۲}$$

با توجه به اینکه $r_c << r_1,\ r_2$ است می توانیم عبارت بالا را با تقریب خیلی خوب به صورت زیر بنویسیم:

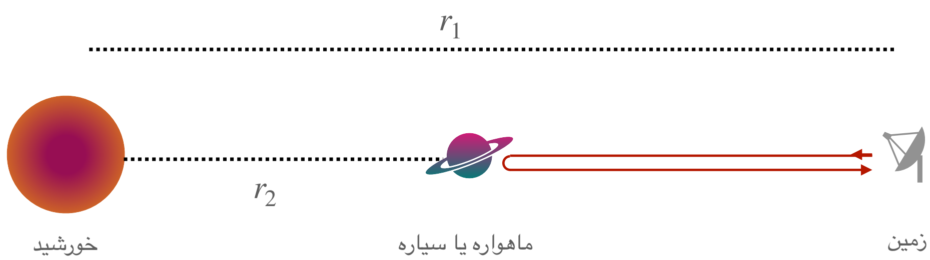
$$\Delta\tau \approx \frac{2}{c}\Big[r_1 - r_2 + r_c\ln(\frac{r_1}{r_2}) - \frac{r_c}{2}\frac{r_1-r_2}{r_1}\Big] \tag{۴۳}$$

اگر اثرات نسبیت عام یعنی کند شدن زمان در اثر گرانش را در نظر نگیریم، زمان رفت و برگشت را تنها می بایست از تقسیم فاصله کل یعنی ΔL از رابطه (**؟؟**) بر سرعت نور محاسبه کنیم. این زمان برابر است با:

$$\Delta\tau' = \frac{2\Delta L}{c} \approx \frac{2}{c}\Big[r_1 - r_2 + \frac{r_c}{2}\ \ln\frac{r_1}{r_2}\Big]. \tag{۴۴}$$

بنابراین میزان تاخیر در زمانِ پژواک برابر است با:

$$\Delta\tau - \Delta\tau' = \frac{r_c}{c}\left[\ln\frac{r_1}{r_2} - \frac{r_1 - r_2}{r_1}\right]. \tag{۴۵}$$



شکل ۲: سیگنالی که از زمین به یک ماهواره یا سیاره می رسد، در اثر گرانش خورشید، زمان بیشتری طول می کشد که به سوی مین بازگردد.

- **تمرین:** وقتی که عطارد در مدار خود بین خورشید و زمین قرار می گیرد، میزان تاخیر در زمان پژواک را حساب کنید. یک بار هم وقتی که عطارد در آن طرف خورشید قرار می گیرد این زمان را حساب کنید.

میزان تاخیر در زمان پژواک برای وقتی که عطارد بین زمین و خورشید است بسیار ناچیز است. اما این تاخیر برای وقتی که عطارد در آن طرف خورشید قرار می گیرد قابل اندازه گیری است. البته محاسباتی که باید برای این وضعیت انجام دهیم پیچیده تر است، چرا که مسیر علایم راداری با وجود خورشید در بین راه مسیر مستقیم نخواهد بود. این تست ها برای سیاره زهره و عطارد به ترتیب در سالهای ۱۹۶۸ و ۱۹۷۱ انجام شده و نتایج آن نیز به ترتیب به اندازه ۲۰ درصد و ۵ درصد با محاسبات نظری توافق داشته است. در ۱۹۷۵ تست های انجام شده برای سفینه های مارینر [۷] ۶ و ۷، تا ۳ درصد با محاسبات نظری توافق داشته است.

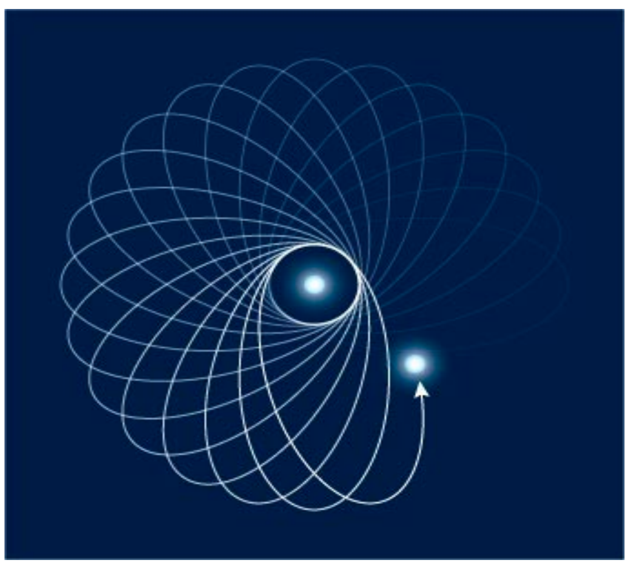
این آزمایشها در سالهای ۱۹۷۸، ۱۹۷۹ و ۱۹۹۱ نیز با دقت های بیشتر تکرار شده و میزان تفاوت مشاهده و محاسبات نظری به یک دهم درصد کاهش یافته است.

---

[۷] Mariner

۵ حرکت تقدیمی مدار سیارات

یکی از مهم ترین موفقیت های نسبیت عام تصحیح محاسبه دقیق حرکت تقدیمی مدار عطارد و تطابق آن با مقدار مشاهده شده یعنی 43 ثانیه در قرن است. مدار عطارد به دور خورشید یک بیضی نسبتا کشیده است که در آن قطر بزرگ بیضی ثابت نیست بلکه به آرامی به دور خورشید می چرخد. تصویر بسیار اغراق شده ای از این حرکت که به آن حرکت تقدیمی عطارد [۸] گفته می شود، در شکل (۳) نشان داده شده است. اگر عطارد تنها تحت تاثیر گرانش خورشید باشد، چنین حرکت تقدیمی ای نمی بایست رخ دهد و مدار عطارد می بایست یک بیضی کامل و ایستا باشد. حرکت تقدیمی مشاهده شده را می توان به اثر اختلالی دیگر سیارات نزدیک به عطارد در منظومه شمسی یا مداری از ستاره های دنباله دار که به دور خورشید می چرخند نسبت داد و در حقیقت تا قبل از نظریه نسبیت عام تلاش های دامنه داری برای توضیح این حرکت تقدیمی انجام شده ولی همگی با شکست روبرو شده اند. در این بخش می خواهیم مقدار این حرکت تقدیمی را بر اساس نظریه گرانش نسبیتی محاسبه کنیم. اما قبل از آن آنچه را که در مورد مدارهای کپلری آموخته ایم به یاد می آوریم.



شکل ۳: تصویر بسیار اغراق آمیزی از حرکت تقدیمی عطارد

[۸] Perihelion of Mercury

۶ مدارهای کپلری در گرانش نیوتنی

ذره ای به جرم m را در نظر بگیرید که در میدان گرانش یک جسم به جرم M واقع در مبداء مختصات، حرکت می کند. معادله حرکت این ذره عبارت است از:

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{\mathbf{r}}. \tag{۴۶}$$

می دانیم که اندازه حرکت این ذره که با رابطه $\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$ تعریف می شود، یک ثابت حرکت است. هرگاه مختصات دایره ای (r, ϕ) را برای این ذره در صفحه ای که عمود بر بردار اندازه حرکت است به کار ببریم، می توانیم بنویسیم:

$$\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}} \tag{۴۷}$$

و

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\phi}\hat{\boldsymbol{\phi}} \tag{۴۸}$$

و

$$\ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\hat{\mathbf{r}} + (r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi})\hat{\boldsymbol{\phi}} \tag{۴۹}$$

بنابراین معادله حرکت ذره در میدان گرانش به صورت زیر در می آید:

$$(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\hat{r} + (r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi})\hat{\boldsymbol{\phi}} = -\frac{GM}{r^2}\hat{\mathbf{r}}. \tag{۵۰}$$

با ضرب داخلی دو طرف در بردار $\hat{\phi}$ به رابطه $\frac{d}{dt}r^2\dot{\phi} = 0$ می رسیم که همان بقای تکانه زاویه ای است. بنابراین قرار می دهیم:

$$r^2\dot{\phi} = h. \tag{۵۱}$$

بنابراین h تکانه زاویه ای بر واحد جرم ذره ای است که به دور M می چرخد. اگر دو طرف رابطه (۵۰) را در $\hat{\mathbf{r}}$ ضرب داخلی کنیم به معادله زیر می رسیم:

$$(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) = -\frac{GM}{r^2}. \tag{۵۲}$$

با جایگذاری $r^2\dot{\phi}=h$ در این رابطه به معادله زیر می رسیم:

$$\ddot{r}-\frac{h^2}{r^3}=-\frac{GM}{r^2}. \tag{۵۳}$$

رابطه بالا را در $\dot{r}$ ضرب می کنیم و به نتیجه زیر می رسیم که در واقع چیزی نیست جز قانون بقای انرژی:

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2+\frac{1}{2}\frac{h^2}{r^2}=\frac{GM}{r}. \tag{۵۴}$$

اما ما واقعا به سرعت حرکت ذره در طی مسیرش علاقمند نیستیم بلکه بیشتر به شکل و شمایل مسیر علاقمندیم. بنابراین برای ما مهم است که بفهمیم r چه رابطه ای با ϕ دارد. به همین دلیل است که در رابطه بالا را با توجه به رابطه

$$\frac{dr}{dt}=\frac{dr}{d\phi}\frac{d\phi}{dt}=:r'\frac{h}{r^2} \tag{۵۵}$$

به صورت زیر بازنویسی می کنیم:

$$\frac{r'^2}{h^4}+\frac{1}{r^2}=\frac{2GM}{h^2r}. \tag{۵۶}$$

در این روابط r' به معنای $\frac{dr}{d\phi}$ است، همین طور برای توابع دیگر. طبیعی است که با تعریف $u:=\frac{1}{r}$ سعی کنیم این معادله را ساده کنیم که در این صورت به شکل زیر در می آید:

$$u'^2+u^2=\frac{2GM}{h^2}u. \tag{۵۷}$$

آخرین مرحله ساده شدن این است که از طرفین مشتق بگیریم و این رابطه را به شکل ساده زیر در آوریم:

$$u''+u=\frac{GM}{h^2}. \tag{۵۸}$$

این معادله حل خیلی ساده ای دارد که به شکل زیر است:

$$u=\frac{GM}{h^2}+A\cos(\phi-\phi_0). \tag{۵۹}$$

می توان آن را به شکل زیر نوشت:

$$\frac{l}{r}=1+e\cos(\phi-\phi_0). \tag{۶۰}$$

در دستگاه مختصات قطبی، این معادله یک بیضی است که در آن $l = \frac{h^2}{GM}$ و میزان خروج از مرکز آن [۹] برابر با $e = \frac{Ah^2}{GM}$ است . ثابت های A و ϕ_0 را شرایط اولیه تعیین می کنند.

■ **تمرین:** بیضی نشان داده در شکل (۴) را نگاه کنید. شعاع بزرگ این بیضی برابر با a ، شعاع کوچک آن b و خروج از مرکز آن برابر با $e := \frac{\sqrt{b^2-a^2}}{a}$ است.

الف: کانون های این بیضی در فاصله های $\pm f$ قرار دارند. نشان دهید که

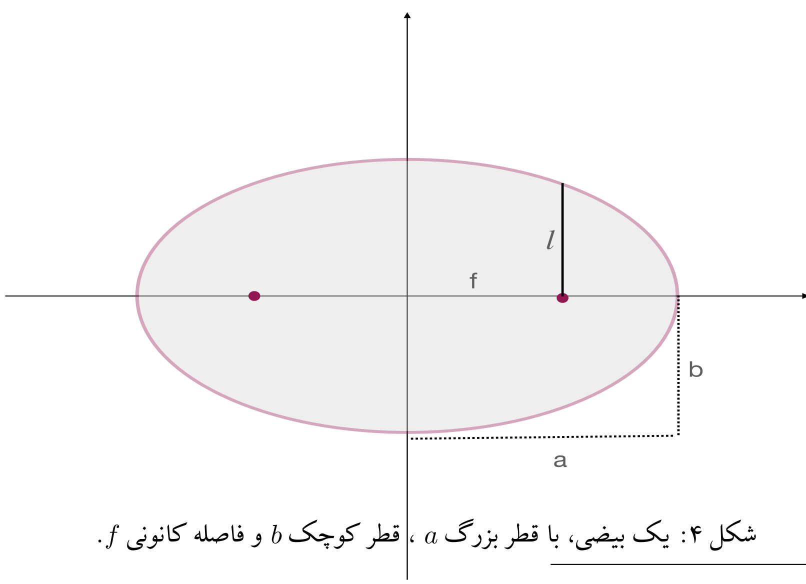
$$f^2 = a^2 - b^2, \qquad l = a(1-e^2).$$

ب: نشان دهید که معادله این بیضی در مختصات قطبی به شکل زیر است:

$$\frac{l}{r} = 1 + e\cos\phi$$

(راهنمایی: مبدا مختصات را لازم نیست در مرکز بیضی قرار دهید.)

پ- درستی گزاره هایی را که در باره مدار کپلری نوشتیم، یعنی مقدار قطر بزرگ و هم چنین خروج از مرکز آن، نشان دهید.



شکل ۴: یک بیضی، با قطر بزرگ a ، قطر کوچک b و فاصله کانونی f.

[۹] Eccentricity

■ **تمرین:** با استفاده از قانون حرکت نیوتن نشان دهید که برای مدار بیضی رابطه زیر برقرار است:

$$T^2 \propto a^3, \tag{۶۱}$$

که در آن T پریود چرخش سیاره است. ضریب تناسب را پیدا کنید.

---

۷ مدارهای شبه کپلری در گرانش نسبیتی

حال مسئله حرکت یک سیاره مثل عطارد را به دور خورشید بر اساس نسبیت عام و گرانش نسبیتی حل می کنیم. می دانیم که مسیر حرکت چنین ستاره ای طبیعتا یک ژئودزی است. برای یافتن معادلات ژئودزی می توانیم از مولفه های محاسبه شده کریستوفل برای متریک شوارتزچیلد استفاده کنیم. راه دیگر هم این است که یک بار دیگر معادلات اویلر لاگرانژ را برای متریک شوارتزچیلد یعنی متریک (۳۶) حل کنیم. این راه دوم به دلیلی که بزودی خواهیم دید،آموزنده تر است. لاگرانژی مورد نظر ما این است:

$$\mathcal{L} \equiv \frac{ds^2}{d\tau^2} = \big(1 - \frac{2M}{r}\big)\dot{t}^2 - \big(1 - \frac{2M}{r}\big)^{-1}\dot{r}^2 - r^2\dot{\theta}^2 - r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2. \tag{۶۲}$$

در این رابطه $\dot{x}$ به معنای $\frac{dx}{d\tau}$ است و τ زمان ویژه است. در نتیجه در طول مسیر حرکت لاگرانژی مقدار ثابتی دارد که برابر است با

$$\mathcal{L} = c^2. \tag{۶۳}$$

بنابراین لاگرانژی خود یک ثابت حرکت است که بعداً می توانیم در حل معادلات حرکت از این ثابت بودن استفاده کنیم. حال اگر معادلات اویلرـ لاگرانژ را برای مختصات t, θ و ϕ بنویسیم به معادلات زیر می رسیم:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau}[(1 - \frac{2M}{r})\dot{t}] &= 0 \\ \frac{d}{d\tau}(r^2\dot{\theta}) - r^2\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2 &= 0 \\ \frac{d}{d\tau}(r^2\sin^2\theta\dot{\phi}) &= 0. \end{aligned} \tag{۶۴}$$

این معادلات در واقع همان معادلات ژئودزی در متریک شوارتزچیلد هستند. دقت کنید که معادله مربوط به r را ننوشته ایم. دلیل اش این است که این معادله اولا پیچیده تر از سه معادله دیگر است و ثانیا این که نیازی به آن نداریم. از آنجا که برای تعیین چهار تابع $t(\tau), r(\tau), \theta(\tau)$ و

$\phi(\tau)$ به چهار معادله دیفرانسیل نیاز داریم، کافی است که سه معادله (۶۴) را حل کنیم و در عین حال ثابت بودن $\mathcal{L}$ را نیز در طول مسیر حرکت در نظر بگیریم تا بتوانیم مسر حرکت را به طور کامل تعیین کنیم. حل معادلات (۶۴) هنوز هم چندان آسان نیست. بنابراین نخست سعی می کنیم بفهمیم آیا در این متریک،حرکت جسم در یک صفحه امکان پذیر هست یا نه؟ صفحه مورد نظر یعنی صفحه حرکت جسم را $\theta = \frac{\pi}{2}$ می گیریم. می خواهیم ببنیم آیا این شرط با معادلات (۶۴) سازگار هست یا خیر؟ برای این کار در معادله دوم θ و $\dot{\theta}$ را مساوی صفر قرار می دهیم که بلافاصله منجر می شود به $\ddot{\theta} = 0$. با مشتق گیری متوالی از همین معادله دوم و قرار دادن مقادیری که برای مشتقات θ بدست آورده ایم در این معادله، درمی یابیم که همه مشتقات θ برابر با صفرند. بنابراین با خیال راحت می توانیم در همه معادلات قرار دهیم $\theta = \frac{\pi}{2}$ که به این معناست که حرکت جسم (سیاره عطارد) در یک صفحه حول خورشید صورت می گیرد. بنابراین باقی می مانیم با دو معادله زیر:

$$\frac{d}{d\tau}(r^2\dot{\phi}) = 0 \longrightarrow r^2\dot{\phi} = h \tag{۶۵}$$

و

$$(1 - \frac{2M}{r})\dot{t} = k, \tag{۶۶}$$

که در آن k و h ثابت هستند. با جایگذاری $\dot{t}$ و $\dot{\phi}$ و $\dot{\theta} = 0$ در رابطه (۶۲) در می یابیم که رابطه زیر برقرار است:

$$k^2\frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} - \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}}\dot{r}^2 - r^2\dot{\phi}^2 = 1. \tag{۶۷}$$

در این رابطه c یعنی سرعت نور را برابر با یک گرفته ایم. حل سه معادله اخیر می بایست توابع $t(\tau), r(\tau)$ و $\phi(\tau)$ را مشخص کند که با حذف τ بین آنها بتوانیم مسیر حرکت را به طور کامل تعیین کنیم. با قرار دادن $\dot{\phi} = \frac{h}{r^2}$ در معادله (۶۷) به معادله زیر می رسیم:

$$k^2 - \dot{r}^2 = (1 + \frac{h^2}{r^2})(1 - \frac{2M}{r}) \tag{۶۸}$$

در این معادله $\dot{r}$ مشتق زمانی r است. اگر فقط شکل مسیر حرکت را بخواهیم و به چگونگی طی کردن این مسیر در طول زمان علاقمند نباشیم، می بایست معادله ای برای $\frac{dr}{d\phi}$ داشته باشیم. ولی می دانیم که

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\phi}\frac{d\phi}{dt} = \frac{dr}{d\phi}\frac{h}{r^2}. \tag{۶۹}$$

بنابراین نهایتا معادله ای که مسیر حرکت را تعیین می کند عبارت خواهد شد از:

$$k^2 - (\frac{dr}{d\phi})^2\frac{h^2}{r^4} = (1 + \frac{h^2}{r^2})(1 - \frac{2M}{r}) \tag{۷۰}$$

این معادله را می توان با تعریف $u=\frac{1}{r}$ به طرز قابل ملاحظه ای ساده کرد. نتیجه عبارت است از:

$$k^2-h^2(\frac{du}{d\phi})^2=(1+h^2u^2)(1-2Mu). \qquad (۷۱)$$

معادله بازهم ساده تر می شود اگر از طرفین یک بار دیگر نسبت به ϕ مشتق بگیریم و آن را ساده کنیم:

$$\frac{d^2u}{d\phi^2}+u=3Mu^2+\frac{M}{h^2}. \qquad (۷۲)$$

این شکل نهایی معادله دیفرانسیلی است که حل کردن آن مسیر حرکت را بدست خواهد داد. این معادله را نیز می توانیم در دستگاه واحدهای متریک بنویسیم. ثابت های با دیمانسیونی که در این مسئله وجود دارند عبارت اند از G یعنی ثابت گرانش و c یعنی سرعت نور.

■ **تمرین:** با قراردادن ثابت های بالا به شکل مناسب نشان دهید که معادله حرکت (۷۲) در دستگاه واحدهای متریک به شکل زیر است:

$$\frac{d^2u}{d\phi^2}+u=3\frac{GM}{c^2}u^2+\frac{GM}{h^2}. \qquad (۷۳)$$

برای مقایسه، معادله حرکت مسیرهای کپلری یعنی معادله (۵۷) را نیز دوباره در زیر می نویسیم:

$$\frac{d^2u}{d\phi^2}+u=\frac{GM}{h^2}. \qquad (۷۴)$$

معلوم می شود که اثر گرانش نسبیتی خود را در پیدایش اولین جمله در سمت راست معادله (۷۳) نشان داده است. بهترا است نسبت دو جمله طرف راست (۷۳) را مقایسه کنیم. نسبت جمله نسبیتی به جمله دیگر برابر است با:

$$\frac{u^2h^2}{c^2} \qquad (۷۵)$$

اما مرتبه های u و h عبارتند از:

$$u\sim\frac{1}{R} \qquad h\sim Rv$$

که در آن R متوسط شعاع مدار سیاره و v متوسط سرعت آن است. بنابراین نسبت جمله نسبیتی به جمله دیگر برابر است با

$$\frac{u^2h^2}{c^2}\sim\frac{v^2}{c^2}, \qquad (۷۶)$$

یعنی مربع سرعت سیاره به سرعت نور. سرعت زمین به دور خورشید در حدود ۳۰ کیلومتر بر ثانیه است و این نسبت برابر با 10^{-8} است. اما برای عطارد، سرعت مداری در حدود ۶۰ کیلومتر بر ثانیه است و نسبت فوق چهاربرابر است. اگرچه بازهم کوچک است ولی نسبتی قابل اندازه

گیری است. پس از این ملاحظات کلی، می توانیم به حل معادله (۷۲) بپردازیم. برای سادگی بازهم به دستگاه واحدهایی برمی گردیم که در آن $G = c = 1$ است. در انتها می توانیم واحدهای دستگاه متریک را به کار ببریم. برای این کار از روش اختلال استفاده می کنیم . می نویسیم $u = u_0 + u_1$ که در آن u_0 حل معادله ای است که در آن جمله کوچک نسبیتی وجود ندارد، یعنی

$$u_0'' + u_0 = \frac{M}{h^2}. \qquad (۷۷)$$

حال حل u_0 را در طرف دوم معادله (۷۲) قرار می دهیم و بدست می آوریم:

$$u_0'' + u_1'' + u_0 + u_1 \approx \frac{M}{h^2} + 3Mu_0^2 \qquad (۷۸)$$

می توانیم این روش را تکرار کنیم و حلی را که بدست می آوریم دوباره در طرف راست معادله قرار دهیم تا تقریب دقیق تری بدست آوریم ولی در همین تقریب رتبه یک نیز تطابق خیلی خوبی با تجربه بدست می آوریم. حل کردن (۷۸) و استفاده از (۷۷) منجر می شود به

$$u_{\prime\prime} + u_1 = 3Mu_0^2. \qquad (۷۹)$$

اما می دانیم که $u_0 = \frac{1}{l}(1 + e\cos\phi)$ که در آن فاز اولیه را برابر با صفر گرفته ایم. بنابراین معادله ای که باید حل کنیم به این شکل است:

$$\begin{aligned} u_1'' + u_1 &= \frac{3M}{l^2}(1 + e^2\cos^2\phi + 2e\cos\phi) \\ &= \frac{3M}{l^2}(1 + \frac{e^2}{2} + \frac{e^2}{2}\cos 2\phi + 2e\cos\phi). \end{aligned} \qquad (۸۰)$$

برای حل این معادله u_1 را به صورت زیر قرار می دهیم (یا حدس می زنیم):

$$u_1 = A + B\phi\sin\phi + C\cos 2\phi, \qquad (۸۱)$$

که در نتیجه آن معادله (۸۰) به شکل زیر در می آید:

$$A + 2B\cos\phi - C\cos 2\phi = \frac{3M}{l^2}(1 + \frac{e^2}{2} + \frac{e^2}{2}\cos 2\phi + 2e\cos\phi) \qquad (۸۲)$$

مقایسه ضرایب به نتیجه زیر می رسد:

$$A = \frac{3M}{l^2}(1 + \frac{e^2}{2}), \qquad B = \frac{3Me}{l^2}, \qquad C = -\frac{3Me^2}{2l^2} \qquad (۸۳)$$

اگر توجه کنیم که مدار عطارد نیز مثل بقیه سیارات منظومه شمسی خیلی نزدیک به دایره است، یعنی خروج از مرکز آن e بسیار کوچک است، می توانیم با صرف نظر کردن از جملات شامل e^2 شکل نهایی مدار را در رتبه یک به صورت زیر بنویسیم:

$$u \approx u_0 + \frac{3M}{l^2} + \frac{3M}{l^2}\phi\sin\phi = \frac{1}{l}\big(1 + \frac{3Me}{l} + e\cos\phi + \frac{3Me}{l}\phi\sin\phi\big) \tag{۸۴}$$

دو جمله اول یعنی $1 + \frac{3Me}{l}$

تنها باعث تغییر بسیار جزئی در طول شعاع متوسط مدار سیاره می شود و تاثیری در حرکت تقدیمی ندارد. می توانیم از آن صرف نظر کنیم. آنچه که در حرکت تقدیمی مهم است جمله سوم است. می توانیم از رابطه

$$\cos(\phi - \epsilon) \approx \cos\phi - \epsilon\sin\phi$$

برای وقتی که $\epsilon \approx \frac{3M}{l}$ کوچک است، استفاده کنیم و جواب نهایی را به صورت زیر بنویسیم:

$$u \approx \frac{1}{l}\big(1 + e\cos(1-\epsilon)\phi\big). \tag{۸۵}$$

این رابطه به این معناست که پریود چرخش عطارد 2π نیست، بلکه برابر است با

$$\frac{2\pi}{1-\epsilon} \approx 2\pi(1+\epsilon).$$

در نتیجه مقدار حرکت تقدیمی عطارد برابر است با:

$$2\pi\epsilon = 2\pi\frac{3M}{l}. \tag{۸۶}$$

می توانیم طرف راست را در سیستم واحدهای متریک بنویسیم که دراین صورت می بایست M را تبدیل به $\frac{GM}{c^2}$ کنیم. بنابراین مقدار حرکت تقدیمی برابر است با:

$$2\pi\epsilon = 2\pi\frac{3GM}{c^2 l}. \tag{۸۷}$$

و با توجه به مقداررابطه $l = a(1-e^2)$ می توانیم آن را به صورت زیر بنویسیم:

$$2\pi\epsilon = 2\pi\frac{3GM}{c^2 a(1-e^2)}. \tag{۸۸}$$

از همین عبارت می توانیم مقدار حرکت تقدیمی را محاسبه کنیم. اگر بخواهیم طرف راست را بر حسب پریود گردش عطارد بنویسیم می بایست از رابطه بین شعاع و پریود استفاده کنیم. این رابطه را در تمرین های این درس ثابت کرده اید:

$$GM = \frac{4\pi^2}{T^2}a^3. \tag{۸۹}$$

با جایگزینی GM از این رابطه در (۸۸) به عبارت معادلی برای مقدار حرکت تقدیمی می رسیم:

$$2\pi\epsilon = \frac{24\pi^3a^2}{c^2T^2(1-e^2)}. \tag{۹۰}$$

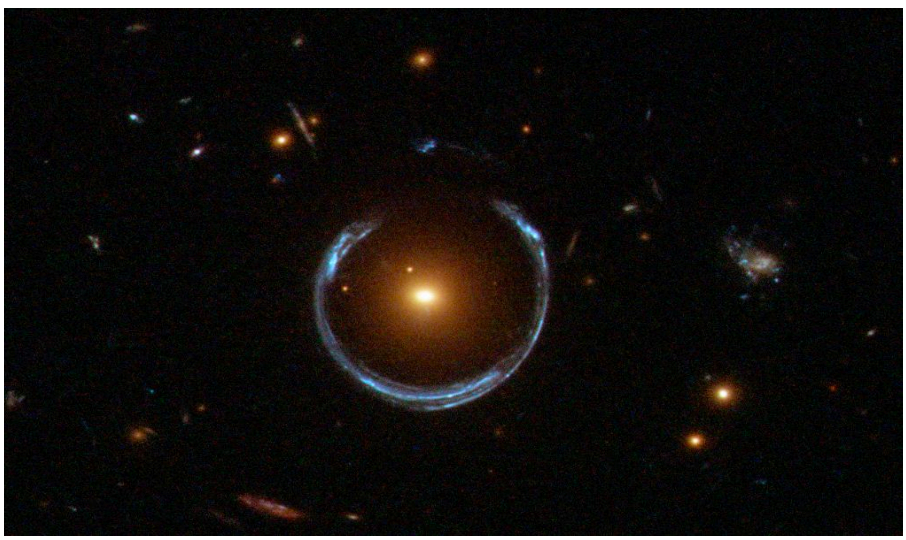
■ **تمرین:** با استفاده از داده هایی که در مورد عطارد وجود دارد، مقدار حرکت تقدیمی را برای این سیاره حساب کنید بر حسب ثانیه بر قرن حساب کنید. این مقدار را برای زمین نیز حساب کنید.

۸ خم شدن شعاع نور

یکی از پیش بینی های مهم نسبیت عام خم شدن شعاع نور ستارگان است وقتی که از کنار یک ستاره سنگین عبور می کنند. این انحراف، اگرچه خیلی کوچک است باعث جابجایی خیلی کوچکی در مکان ظاهری یک ستاره می شود. این جابجایی البته تنها وقتی قابل مشاهده است که هم خورشید در آسمان باشد و هم ستاره در تاریکی ای مثل شب قابل رویت باشد. چنین وضعیتی فقط در موقع خورشید گرفتگی رخ می دهد، یعنی موقعی که ماه به طور کامل قرص خورشید را بپوشاند. پیش بینی نسبیت عام از انحراف نور ستارگان در چنین شرایطی 1.75 ثانیه قوس است. (۷). نخستین باری که امکان تحقیق درستی این پیش بینی فراهم شد، در سال ۱۹۱۹ درست یک سال پس از پایان جنگ جهانی اول بود. بهترین مکان برای مشاهده ماه نیز جایی در افریقا بود، جاییکه گروه بزرگی به سرپرستی سر آرتور ادینگتون، [۱۰] منجم و فیزیکدان مشهور توانست این نتیجه را تایید کند. این نکته خیلی آموزنده ای است که یک منجم انگلیسی به چنین تلاشی برای تحقیق تجربی یک پیش بینی نظری از یک فیزیکدان آلمانی (پس از یک مخاصمه طولانی و دهشت بار جهانی) دست بزند و نشان می دهد که چگونه علم از مرزهای تنفر و جنگ بین ملت ها و اقوام می گذرد و آنها را به هم نزدیک می کند باید به یاد داشته باشیم که چنین اندازه گیری هایی به هیچ وجه آسان نیستند و احتیاج به تمهیدات طولانی و بعضا چند ساله دارند. به همین دلیل است که از آن موقع تا کنون جمعا هفت بار این اندازه گیری با نور ستارگان انجام شده است و نتیجه بین

[۱۰] Sir Arthur Eddington

0.7 تا 1.57 برابر پیش بینی نسبیت متغیر است. بنابراین در انحراف نور در میدان گرانش هیچ شکی وجود ندارد اگرچه در مورد تطابق آن با مقدار پیش بینی نسبیت عام هنوز دقت کامل وجود ندارد. اخیرا با رصد نور کوازار [۱۱] ها و هم چنین استفاده از رادیو تلسکوپ ها و روش های تداخل سنجی، میزان توافق با پیش بینی اینشتین خیلی نزدیک تر شده است و به میزان 1.57 تا 1.82 ± 0.2 ثانیه قوس رسیده است. انحراف نور ستارگان و کهکشان ها باعث پدیده جالب دیگری نیز می شود که به آن ریزهمگرایی گرانشی [۱۲] می گویند. این پدیده باعث می شود که یک جسم بسیار سنگین مثلا یک کهکشان بتواند با خم کردن نوری که از کهکشان های پشت سرش به ما می رسد، به جای یک تصویر، چند تصویر از انها یا حتی گاهی اوقات یک حلقه از انها ایجاد کند. این پدیده امروزه براحتی قابل مشاهده است. شکل (۵) یک نمونه از آن را نشان می دهد:



شکل ۵: یک کهکشان با نور قرمز از کهکشانی که در پشت سر آن قرار دارد، و نور آبی دارد، در اثر ریزهمگرایی گرانشی یک حلقه آبی رنگ ایجاد کرده است. معمولا ریزهمگرایی باعث ایجاد دو یا چند تصویر مجزا می شود، ولی در اینجا خط دید و محل قرار گرفته کهکشان ها به گونه ای است که یک حلقه کامل ایجاد شده. . این تصویر توسط تلسکوپ هابل گرفته شده.

[۱۱] Quazar

[۱۲] Gravitational Lensing

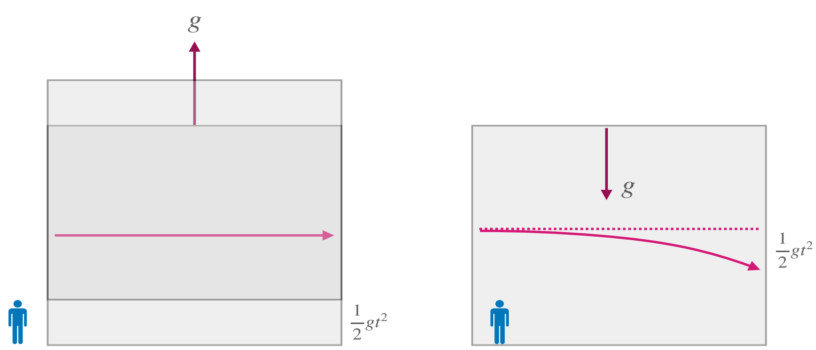
۱.۸ محاسبه مرتبه بزرگی انحراف بااستفاده از اصل هم ارزی

برای آنکه مرتبه بزرگی این انحراف را حساب کنیم، و همچنین به صورت شهودی بفهمیم که چرا این انحراف رخ می دهد می توانیم اصل هم ارزی را به یاد بیاوریم و به شکل (۶) نگاه می کنیم. سمت چپ تصویر آسانسوری دیده می شود که با شتاب g به سمت بالا حرکت می کند و نور نیز مسیر افقی را به صورت مستقیم طی می کند. این دیدگاه ناظری است که درون آسانسور نیست. سمت راست همین پدیده از دید ناظر درون آسانسور نشان داده شده. این ناظر فکر می کند که یک نیروی گرانش رو به پایین وجود دارد که همه چیز، از جمله نور را با شتاب g به سمت پایین می کشد. برای او نور وقتی که فاصله افقی L را با سرعت c طی می کند، یک فاصله عمودی نیز به اندازه

$$\Delta y = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}g(\frac{L}{c})^2$$

نیز طی می کند. بنابراین میزان زاویه انحراف نور برای او برابر است با:

$$\theta \approx \frac{\Delta y}{L} = \frac{1}{2}g\frac{L}{c^2}. \tag{۹۱}$$



شکل ۶: یک محاسبه ساده و خیلی تقریبی با استفاده از اصل هم ارزی برای تعیین انحراف نور.

حال اگر برای g قرار دهیم $g = \frac{GM}{R_\odot^2}$ که در آن M جرم و $R_\odot$ شعاع خورشید است و هم چنین اگر برای L به صورت خیلی تقریبی قرار دهیم $2R_\odot$ مقدار تقریبی انحراف برابر می شود با:

$$\theta \approx \frac{GM}{R_\odot c^2} \tag{۹۲}$$

که چهار برابر کمتر از مقدار دقیقی است که بعداً محاسبه خواهیم کرد. به صورت شهودی این تفاوت ناشی از این است که L یعنی فاصله افقی ای را که نور تحت اثر گرانش بوده است به اندازه قطر خورشید گرفته ایم و حال آنکه جاذبه خورشید در یک فاصله خیلی طولانی تر بر شعاع نور اثر می گذارد. اگر این فاصله را به طور موثر چهاربرابر قطر خورشید می گرفتیم، نتیجه این محاسبه ساده با نتیجه محاسبه دقیق یکی می شد.

۹ محاسبه دقیق

برای اینکه مقدار این انحراف را حساب کنیم، می بایست تقریبا همان مراحلی را طی کنیم که برای محاسبه حرکت تقدیمی عطارد طی کردیم. متریک اطراف خورشید متریک شوارتچیلد است و نور روی یک مسیر ژئودزی حرکت می کند. تنها تفاوت اش با مسئله مدار عطارد این است که جهان خطی که نور طی می کند یک جهان خط نورگونه است . بنابراین به جای معادله (۶۲) معادله زیر را داریم:

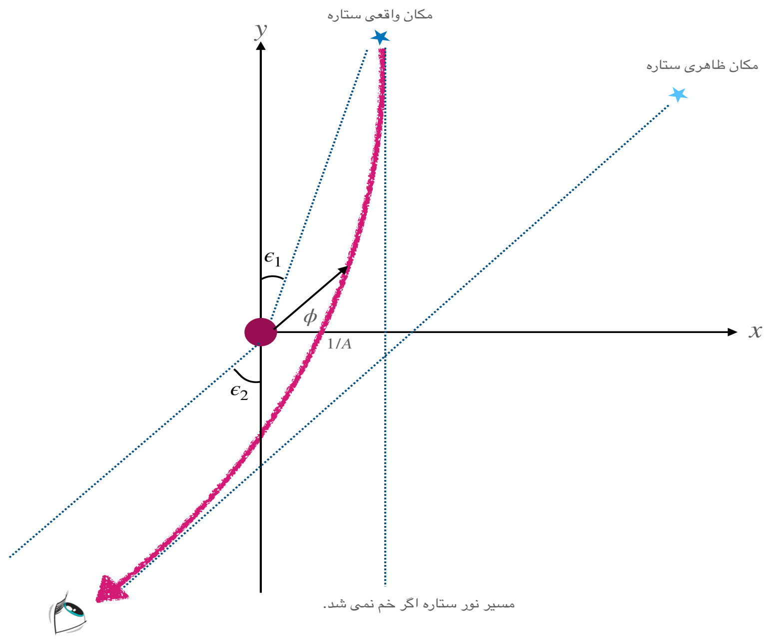
$$0 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}\dot{r}^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta\dot{\phi}^2. \quad (۹۳)$$

بنابراین با طی کردن همان مراحل و حل معادلات ژئودزی یعنی معادلات (۶۴) و توجه به معادله (۹۳) به معادله زیر می رسیم:

$$\frac{d^2}{d\phi^2} + u = 3Mu^2. \quad (۹۴)$$

این معادله را نیز می توانیم به صورت اختلالی حل کنیم و بنویسیم $u = u_0 + u_1$ که در آن $u_0 = A\cos\phi$.

معادله $u_0 = A\cos\phi$ را می توانیم به صورت $r\cos\phi = \frac{1}{A}$ بنویسیم. اگر به شکل (۷) نگاه کنیم متوجه می شویم که این معادله در حقیقت نشان دهنده حرکت شعاع نوری است که در یک خط مستقیم حرکت می کند و نزدیک ترین فاصله اش از خورشید برابر با $\frac{1}{A}$ است.



شکل ۷: انحراف نور ستاره وقتی که از کنار خورشید عبور می کند باعث تغییر در مکان ظاهری آن می شود. در نظریه گرانشی نسبیت این انحراف به میزان 1.75 ثانیه قوس محاسبه می شود.

حال اگر اختلال به کار ببریم و u_1 را کوچک بگیریم ، در رتبه اول اختلال طرف راست را برابر با u_0 قرار می دهیم و بدست می آوریم

$$\frac{d^2u_1}{d\phi^2} + u_1 = 3MA^2\cos^2\phi. \tag{۹۵}$$

برای حل این معادله قرار می دهیم

$$u_1 = B + C\cos\phi + D\cos 2\phi,$$

که در نتیجه آن بدست می آوریم:

$$u_1 = \frac{MA^2}{2}\Big(3 - \cos 2\phi\Big) \tag{۹۶}$$

و در نتیجه حل کامل مدار عبارت خواهد بود از:

$$u = A\cos\phi + \frac{MA^2}{2}[3 - \cos 2\phi]. \tag{۹۷}$$

حال دقت می کنیم که به ازای دو زاویه یکی در ابتدای مسیر نور و دیگری در انتهای مسیر نور $u = \frac{1}{r}$ برابر با صفر می شود. این دو زاویه به ترتیب تفاوت خیلی کمی با $\frac{\pi}{2}$ و $-\frac{\pi}{2}$ دارند. آنها را $\frac{\pi}{2} - \epsilon_1$ و $\frac{-\pi}{2} - \epsilon_2$ می نامیم. (دقت کنید که مقدار دقیق ϵ_1 بسته به فاصله ستاره از خورشید دارد. از آنجا که نزدیک ترین ستاره به خورشید فاصله بسیار زیادی (در حدود ۴ سال نوری) با آن دارد، ϵ_1 بسیار به صفر نزدیک است. هر چه که هست آنچه که مورد نظر ماست میزان انحراف است که از $\epsilon_2 - \epsilon_1$ بدست می آید.)

بنابراین از معادله حرکت (۹۷) بدست می آوریم:

$$\begin{aligned} 0 &= A\epsilon_1 + \frac{MA^2}{2}4 \\ 0 &= -A\epsilon_2 + \frac{MA^2}{2}4 \end{aligned} \tag{۹۸}$$

و در نتیجه

$$\epsilon_2 - \epsilon_1 = 4MA. \tag{۹۹}$$

برای وقتی که نور ستاره درست از لبه خورشید می گذرد (یا در واقع برای وقتی که به ستارگانی نگاه می کنیم که خط دیدشان درست در لبه خورشید قرار دارد) A برابر است با عکس شعاع خورشید. هم چنین در واحدهای متریک می بایست M را تبدیل به $\frac{GM}{c^2}$ کنیم. بنابراین مقدار انحراف نور خورشید برابر است با:

$$\delta \equiv \epsilon_2 - \epsilon_1 = \frac{4GM}{c^2 R_\odot}. \tag{۱۰۰}$$

■ **تمرین:** الف: مقدار انحراف نور ستارگان را وقتی که از لبه خورشید به آنها نگاه می کنیم برحسب ثانیه قوس حساب کنید.

ب: مقدار انحراف نور ستارگان را وقتی از کنار یک کوتوله سفید به جرم خورشید و به شعاع ۷۰۰۰ کیلومتر عبور می کند حساب کنید.

۱۰ مسئله ها:

■ **مسئله اول:** متریک شوارتزچیلد را در نظر بگیرید. صفحه استوایی با قید $\theta = \frac{\pi}{2}$ مشخص می شود. نشان دهید که این صفحه تخت نیست.

■ **مسئله دوم:** شعاع شوارتزچیلد را برای اجرام زیر حساب کنید: ماه، زمین، خورشید، یک ستاره که جرم آن یک میلیون برابر خورشید است.

■ **مسئله سوم:** دو جسم کروی را در نظر بگیرید که شعاع آنها با شعاع شوارتزچیلد آنها یکی باشد. جرم یکی از این دو جسم برابر با جرم زمین و جرم دیگری با جرم خورشید برابر است. کدام یک از این دو جسم چگال تر است؟

■ **مسئله چهارم:**

الف: در گرانش نیوتنی نشان دهید که برای جسمی که در صفحه استوا حرکت می کند رابطه بقای انرژی به صورت زیر درمی آید:

$$(\frac{du}{d\phi})^2+u^2=E+\frac{2GMu}{h^2}, \qquad (۱۰۱)$$

که در آن $u=\frac{1}{r}$، و h تکانه زاویه ای بر واحد جرم است، $h=r^2\dot{\phi}$. معنای فیزیکی E را پیدا کنید.

ب: در گرانش نسبیتی و با متریک شوارتزچیلد نشان دهید که معادله حرکت جسمی که در صفحه استوا حرکت می کند عبارت است از:

$$(\frac{du}{d\phi})^2+u^2=E+\frac{2GMu}{h^2}+\frac{2GM}{c^2}u^3. \qquad (۱۰۲)$$

■ **مسئله پنجم:** در این مسئله می خواهیم سقوط آزاد یک جسم را در میدان گرانش ناشی از یک ستاره یا سیاره مطالعه کنیم. متریک فضازمان را نیز متریک شوارتزچیلد می گیریم.

الف: در متن درس معادله حرکت یک جسم که دارای اندازه حرکت زاویه است به صورت زیر در می آید:

$$k^2-\dot{r}^2=(1+\frac{h^2}{r^2})(1-\frac{2M}{r}) \qquad (۱۰۳)$$

اگر جسم روی یک خط عمودی که از مرکز ستاره می گذرد حرکت کند، اندازه حرکت زاویه ای آن صفر خواهد بود، بنابراین معادله بالا به صورت زیر در می آید:

$$k^2-\dot{r}^2=(1-\frac{2M}{r}) \qquad (۱۰۴)$$

الف‌ـ از این معادله نتیجه بگیرید که:

$$\ddot{r} + \frac{GM}{r^2} = 0. \tag{۱۰۵}$$

این معادله حرکت با معادله حرکت جسمی که در میدان گرانش نیوتنی حرکت می کند، یکی است. تفاوت آن این است که در اینجا r مختصه شعاعی است نه فاصله شعاعی و مشتق نیز نسبت به زمان ویژه گرفته شده است.

۱۱ ضمیمه: محاسبه تانسور ریمان برای متریک شوارتزچیلد

در این ضمیمه نشان می دهیم که چگونه مولفه های تانسور ریمان محاسبه می شوند. برای متریک شوارتزچیلد می دانیم که

$$g_{00} = e^{2\nu}, \qquad g_{11} = -e^{2\lambda}, \qquad g_{22} = -r^2, \qquad g_{33} = -r^2 \sin^2\theta \tag{۱۰۶}$$

و از آنجا

$$\Gamma^1_{00} = \nu' e^{2\nu - 2\lambda} \qquad \Gamma^0_{10} = \nu' \tag{۱۰۷}$$

$$\Gamma^1_{11} = \lambda' \qquad \Gamma^2_{12} = \Gamma^3_{13} = \frac{1}{r} \tag{۱۰۸}$$

$$\Gamma^1_{22} = -re^{-2\lambda} \qquad \Gamma^3_{23} = \cot\theta \tag{۱۰۹}$$

$$\Gamma^1_{33} = -re^{-2\lambda}\sin^2\theta \qquad \Gamma^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta. \tag{۱۱۰}$$

که در آن

$$e^{2\nu} = 1 - \frac{2m}{r} \qquad e^{2\lambda} = \frac{1}{1 - \frac{2m}{r}}. \tag{۱۱۱}$$

به طور کلی برای هر متریکی می دانیم که مولفه های تانسور ریمان به شکل زیر محاسبه می شوند:

$$R_{abcd} = \frac{1}{2}\big(\partial_a\partial_d g_{bc} + \partial_b\partial_c g_{ad} - \partial_b\partial_d g_{ac} - \partial_a\partial_c g_{bd}\big) - \Gamma^f{}_{ac}\Gamma_{fbd} + \Gamma^f{}_{ad}\Gamma_{fbc} \quad (۱۱۲)$$

در فضازمان چهاربعدی، تعداد مولفه های مستقل این تانسور ۲۰ تاست. برای محاسبه این مولفه های مستقل توجه به چند نکته مفید است.

نکته اول: تمامی مولفه هایی از تانسور ریمان مثل R_{0ijk} که یک مولفه زمانی و سه مولفه فضایی دارند برابر با صفرند. برای دیدن این نکته توجه می کنیم که همه مولفه های متریک اولا قطری هستند و ثانیا مستقل از زمان اند، و در نتیجه:

$$\begin{aligned} R_{0ijk} &= \frac{1}{2}\big(\partial_0\partial_k g_{ij} + \partial_i\partial_j g_{0k} - \partial_i\partial_k g_{0j} - \partial_0\partial_j g_{ik}\big) - \Gamma^f{}_{0j}\Gamma_{fik} + \Gamma^f{}_{0k}\Gamma_{fij} \\ &= -\Gamma^f{}_{0j}\Gamma_{fik} + \Gamma^f{}_{0k}\Gamma_{fij}. \end{aligned} \quad (۱۱۳)$$

اما با توجه به فرم علایم کریستوفل (۱۰۷) می توان فهمید که برای اینکه Γ^f_{0j} یا Γ^f_{0k} غیر صفر باشند، اندیس f تنها می تواند مقدار 0 را اختیار کند که در این صورت علایم Γ_{0ij} و Γ_{0ik} صفر خواهند بود که کل عبارت را تبدیل به صفر می کند.

نکته دوم: مولفه هایی مثل $R_{0i,0,j}$ که دو اندیس زمانی و دو اندیس فضایی دارند نیز به راحتی محاسبه می شوند. برای این نوع مولفه ها داریم:

$$\begin{aligned} R_{0i0k} &= \frac{1}{2}\big(\partial_0\partial_k g_{i0} - \partial_i\partial_k g_{00} + \partial_i\partial_0 g_{0k} - \partial_0\partial_0 g_{ik}\big) - \Gamma^f{}_{00}\Gamma_{fik} + \Gamma^f{}_{0k}\Gamma_{fi0} \\ &= \frac{-1}{2}\partial_i\partial_k g_{00} - \Gamma^f{}_{00}\Gamma_{fik} + \Gamma^f{}_{0k}\Gamma_{fi0}. \end{aligned} \quad (۱۱۴)$$

بازهم با توجه به مولفه های متریک و دقت در علایم کریستوفل می توانیم این عبارت را ساده تر کنیم و بدست آوریم:

$$\begin{aligned} R_{0i0k} &= -\frac{1}{2}\partial_1\partial_1 g_0 0\delta_{i1}\delta_{k1} - \Gamma^1_{00}\Gamma_{1ik} + \Gamma^0_{01}\Gamma_{0i0}\delta_{k1} \\ &= \delta_{k1}\Big(-\frac{1}{2}\partial_1\partial_1 g_{00}\delta_{i1} + \Gamma^0_{01}\Gamma_{0i0}\Big) - \Gamma^1_{00}\Gamma_{1ik}. \end{aligned} \quad (۱۱۵)$$

از این رابطه آخری می توان بدست آورد:

$$R_{0i01} = -\frac{1}{2}\partial_1\partial_1 g_{00}\delta_{i1} - \Gamma^1_{00}\Gamma_{1i1} + \Gamma^0_{01}\Gamma_{0i0}. \quad (۱۱۶)$$

و

$$R_{0i0(k\neq 1)} = -\Gamma^{1}_{00}\Gamma_{1ik}. \tag{۱۱۷}$$

از این دو رابطه و با توجه به مولفه های متریک و علایم کریستوفل نهایتا خواهیم داشت:

$$R_{0101} = -(\nu" + \nu'^{2})e^{2\nu} \qquad R_{0201} = R_{0301} = 0 \tag{۱۱۸}$$

و

$$R_{0202} = R_{0303} = \frac{1}{2}\nu' r e^{4(\nu-\lambda)} \qquad R_{0203} = 0 \tag{۱۱۹}$$

نکته سوم: عناصر دیگر هم به همین شکل محاسبه می شوند. به عنوان مثال با کمی محاسبه می فهمیم:

$$R_{1212} = -\lambda' r, \qquad R_{1313} = -\lambda' r \sin^{2}\theta \qquad R_{2323} = -r^{2}(\cos^{2}\theta + 2^{2\nu}\sin^{2}\theta). \tag{۱۲۰}$$